Feladat 1. Egy $\mathbf{R}$ gyűrű egy $\mathbf{I}_1$ és $\mathbf{I}_2$ ideáljának *szorzatán* az I_1I_2 komplexusszorzat által generált additív részcsoportot értjük. Igazolja, hogy ez mindig ideálja $\mathbf{R}$-nek.

Megoldás: Csak a szívótulajdonságot kell ellenőrizni. Az I_1I_2 által generált additív részcsoport általános eleme $i_1^{(1)}i_2^{(1)}+\cdots+i_1^{(n)}i_2^{(n)}$, ahol $i_1^{(1)},\ldots,i_1^{(n)}\in I_1$ és $i_2^{(1)},\ldots,i_2^{(n)}\in I_2$. Tetszőleges $r\in R$ esetén

$$(i_1^{(1)}i_2^{(1)}+\cdots+i_1^{(n)}i_2^{(n)})r=i_1^{(1)}\cdot i_2^{(1)}r+\cdots+i_1^{(n)}\cdot i_2^{(n)}r\in I_1I_2+\cdots+I_1I_2\subseteq \mathbf{I}_1\mathbf{I}_2,$$

hiszen $\mathbf{I}_2$ ideál, valamint

$$r(i_1^{(1)}i_2^{(1)}+\cdots+i_1^{(n)}i_2^{(n)})=ri_1^{(1)}\cdot i_2^{(1)}+\cdots+ri_1^{(n)}\cdot i_2^{(n)}\in I_1I_2+\cdots+I_1I_2\subseteq \mathbf{I}_1\mathbf{I}_2,$$

hiszen $\mathbf{I}_1$ ideál.

Feladat 2. Mutassa meg, hogy az $\mathbb{R}$ gyűrűnek nincs nemkonstans nemidentikus homomorfizmusa önmagába.

Megoldás: Legyen $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nemtriviális gyűrűhomomorfizmus. Ekkor $\operatorname{Ker}\varphi$ valódi ideálja $\mathbb{R}$-nek. Az $\mathbb{R}$ gyűrű test, tehát egyszerű, ennélfogva $\operatorname{Ker}\varphi$ triviális kell, hogy legyen. Ez azt jelenti, hogy φ injektív.

Mivel

$$1\varphi=(1\cdot 1)\varphi=1\varphi\cdot 1\varphi,$$

$1\varphi\in\{0,1\}$. Az injektivitás miatt $1\varphi=1$.

Ha a természetes szám, akkor

$$a\varphi=(1+\cdots+1)\varphi=1\varphi+\cdots+1\varphi=1+\cdots+1=a,$$

és $(-a)\varphi=-a\varphi=-a$. Tehát φ fix az egészek halmazán.

Ha $\frac{p}{q}$ egy racionális szám, akkor

$$q\cdot\frac{p}{q}\varphi=q\varphi\cdot\frac{p}{q}\varphi=(q\cdot\frac{p}{q})\varphi=p\varphi=p,$$

így $\frac{p}{q}\varphi=\frac{p}{q}$. Tehát φ a racionálisok halmazán is fix.

Ha $x\geq 0$ valós, akkor

$$x\varphi=(\sqrt{x}^2)\varphi=(\sqrt{x}\varphi)^2\geq 0.$$

Így ha $x<y$, akkor $y\varphi-x\varphi=(y-x)\varphi\geq 0$, vagyis φ monoton növő.

A monotonitást kihasználva minden valós c-re

$$c\varphi\geq\sup_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q<c}}q\varphi=\sup_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q<c}}q=c,$$

és

$$c\varphi\leq\inf_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q>c}}q\varphi=\inf_{\substack{q\in\mathbb{Q}\\ q>c}}q=c,$$

tehát φ mindenhol fix.

Feladat 3. Tekintsük a $\mathbb{Z}_2$ feletti 3×3-as mátrixgyűrű gyűrű

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

elemét. Van egy halmazunk, amelyben eredetileg csak az A mátrix van. Ezután újabb mátrixokat tehetünk a halmazba: ha egy X már benne van, akkor 1 euróért beletehetjük egy tetszőleges mátrixszal vett szorzatát (megválaszthatjuk, hogy a szorzatban X elöl vagy hátul van), ha pedig az X_1 és X_2 mátrixok benne vannak, szintén 1 euróért beletehetjük az $X_1 + X_2$ mátrixot. Hány euróra van szükségünk, hogy a gyűrű *bármely* elemét beletehessük a halmazba?

Megoldás: Az A mátrix nemelfajuló, így minden $\mathbb{Z}_2^{3\times 3}$-beli mátrix előáll AX alakban, tehát 1 euróért akármelyik mátrixot be tudjuk tenni a halmazba.

Feladat 4. Egyszerű a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ Abel-csoport endomorfizmusgyűrűje?

Megoldás: Legyen φ az Abel-csoport egy endomorfizmusa, $(1,0)\varphi =: (a,b)$, $(0,1)\varphi =: (c,d)$. Ekkor a csoport minden (x,y) elemére

$$(x,y)\varphi = (x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1))\varphi = x \cdot (a,b) + y \cdot (c,d) = (x,y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

(Ezt hasonlóan lehet belátni, mint a 2. feladatban azt, hogy φ fix a racionálisok halmazán. Ilyenkor kihasználjuk azt, hogy a csoportban tetszőleges nemnulla egésszel való szorzás injektív.) Az $(x,y) \to (x,y) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ leképezés nyilván tényleg endomorfizmus lesz–feltéve, hogy jóldefiniált. A jóldefiniáltsághoz az kell, hogy minden $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ esetén $ax + cy$ egész legyen. Ez akkor fog teljesülni, ha a egész, és $c = 0$.

Így az endomorfizmusgyűrű izomorf lesz az olyan $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ alakú mátrixok gyűrűjével, amikre a egész, b és d pedig racionális. Egyszerű ez a gyűrű? Nem: elemei $\mathbb{Q}$ feletti felső trianguláris mátrixok, a felső trianguláris mátrixok gyűrűjében pedig a szigorúan felső trianguláris mátrixok ideált alkotnak:

$$\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Q}\} \lhd \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{Q}\}.$$